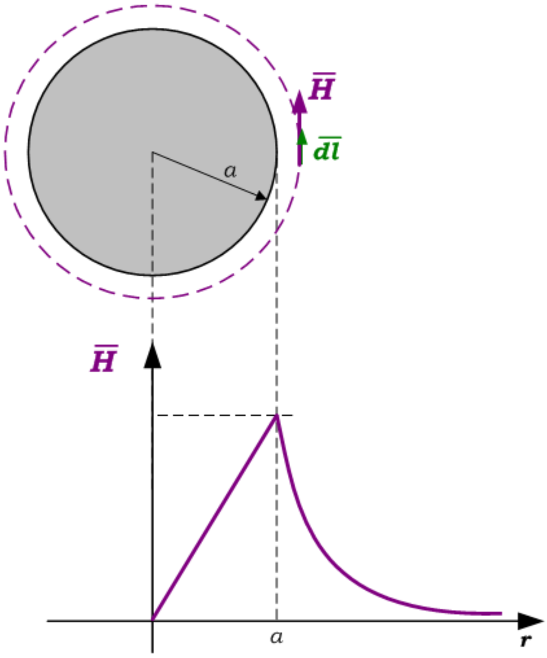
~ CURS 7 ~

5. Legi și relații generale în electromagnetism

5.3. Aplicații ale legii circuitului magnetic

P1. Determinați câmpul magnetic produs de un conductor filiform parcurs de curentul *i*.

Rezolvare:



Câmpul magnetic creat de un conductor cilindric.

Aplicând teorema lui Ampère mai întâi pe o curbă interioară conductorului Γ_i, apoi pe o curbă exterioară Γ_e se pot scrie relațiile:

$$\oint_\Gamma \overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{dl}} = \oint_\Gamma H dl = H\oint_\Gamma dl = H \cdot 2\pi r$$

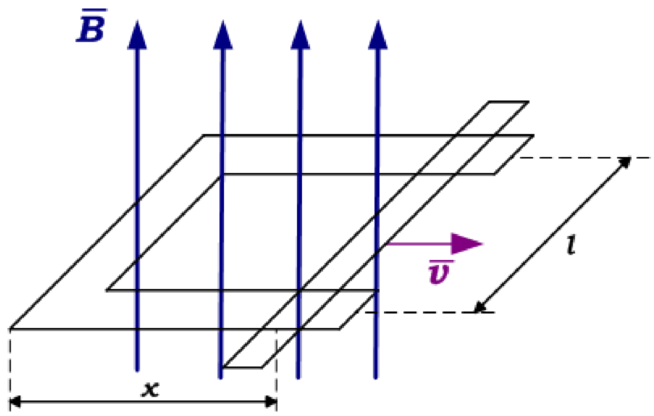
a) pentru $r < a$: $H \cdot 2\pi r = J \cdot \pi r^2 = \dfrac{i}{\pi a^2} \cdot \pi r^2 \Rightarrow H_{\text{int}} = \dfrac{i}{2\pi a^2} \cdot r$

b) pentru $r > a$: $H \cdot 2\pi r = i \Rightarrow H_{ext} = \dfrac{i}{2\pi r}$

Pe suprafața conductorului ($r = a$): $H_{\text{int}}\big|_{r=a} = H_{ext}\big|_{r=a} = \dfrac{i}{2\pi a}$

5.4. Aplicații ale legii inducției electromagnetice

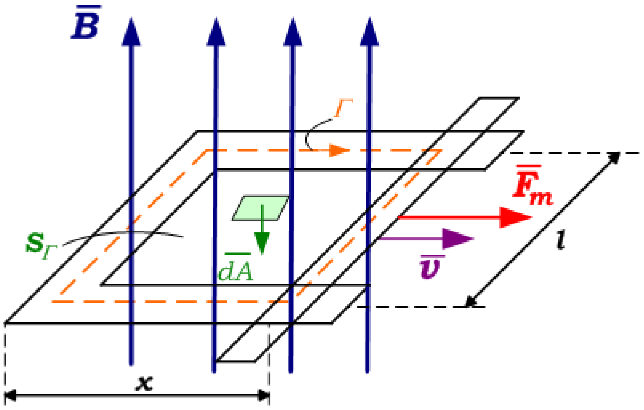
P2. Un cadru perfect conductor pe care alunecă o bară de rezistență *R* cu viteza constantă $\overline{\mathbf{v}}$ este plasat într-un câmp magnetic vertical. Se cunosc $\overline{\mathbf{B}}$ (uniform), *l*, v=constantă, *R*. Se cer: e_Γ, i, F_m, bilanțul puterilor mecanice și electrice.



Rezolvare:

Datorită deplasării barei pe cadru în sistemul reprezentat de ele se induce tensiune electromotoare prin deplasare:

$$\left.\begin{array}{l} e_\Gamma = e_{m,\Gamma} + e_{t,\Gamma} \\ \overline{\mathbf{B}} = ct. \Rightarrow e_{t,\Gamma} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow e_\Gamma = e_{m,\Gamma}$$



$$\left.\begin{array}{l} e_\Gamma = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_{S_\Gamma} \\ \Phi_{S_\Gamma} = \displaystyle\int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{\mathbf{n}} dA = \int_{S_\Gamma} B dA \cos\left(\widehat{\overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{dA}}}\right) = B(lx)\cos\pi = -Blx \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e_\Gamma = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-Blx) = Bl\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Blv \Rightarrow e_\Gamma = Blv$$

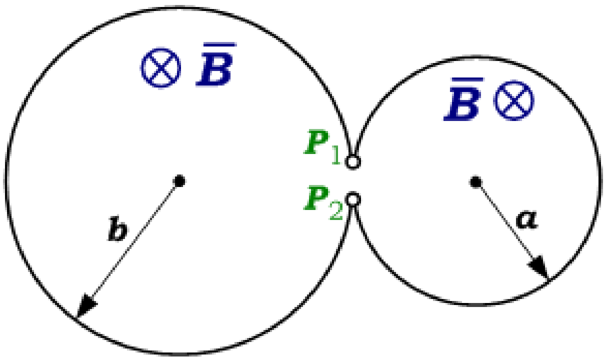
$$i = \frac{e_\Gamma}{R} \Rightarrow i = \frac{Blv}{R}$$

$$\overline{\mathbf{F}}_m = i\left(\overline{\mathbf{B}} \times \overline{\mathbf{l}}\right) = -Bil\,\overline{\mathbf{i}} = -\overline{\mathbf{F}}$$

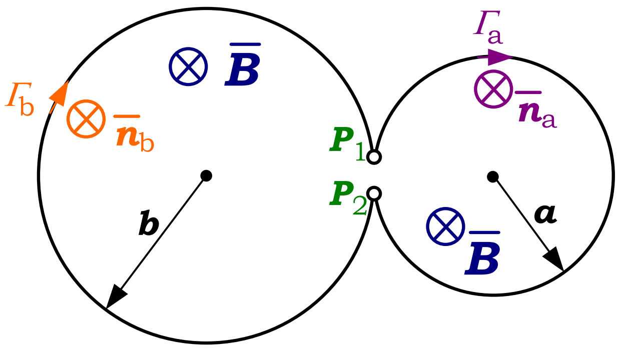
Puterea mecanică: $P_m = \overline{\mathbf{F}} \cdot \overline{\mathbf{v}} = Fv\cos 0 = Bilv = B\dfrac{lvB}{R}lv = \dfrac{(Blv)^2}{R}$

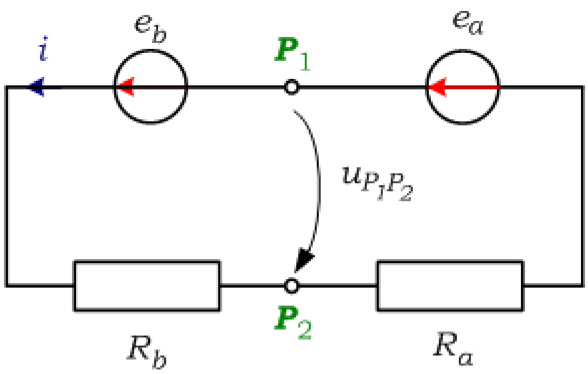
Puterea electrică (Joule): $P_j = Ri^2 = R(\dfrac{Blv}{R})^2 = \dfrac{(Blv)^2}{R}$

<u>**P3**</u>. Un circuit conductor este format dintr-un fir omogen de secțiune constantă (având rezistența R pe unitate de lungime) îndoit în formă de 8 și formând două cercuri neîncrucișate în dreptul punctelor P_1 și P_2. Circuitul este plasat într-un câmp magnetic omogen perpendicular pe planul lui și variabil în timp $B_0 \cdot t/T$. Să se calculeze $u_{p_1 p_2}$.



Rezolvare: Inducția electromagnetică se induce, în acest caz, datorită variației în timp a inducției magnetice. Vom considera fiecare dintre cercuri ca fiind curbe (Γ_a, respectiv Γ_b), pe care putem aplica legea inducției electromagnetice.





$$e_a = e_{\Gamma_a} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_{S_{\Gamma_a}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_\Gamma}\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{n}}dA = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B\pi a^2) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B_0\frac{t}{T}\pi a^2) = -B_0\frac{\pi a^2}{T}$$

Similar: $$e_b = e_{\Gamma_b} = -B_0\frac{\pi b^2}{T}$$

Fiecare din cele două curbe considerate poate fi modelată din punctul de vedere al unui circuit electric printr-un rezistor și o sursă de tensiune.

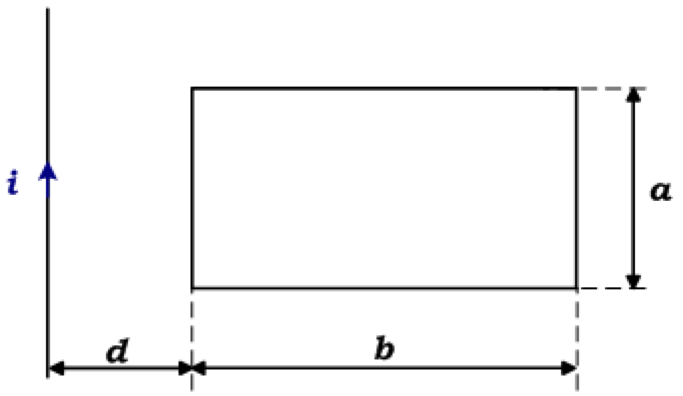
$$R_a = R\cdot l_a = R\cdot 2\pi a \text{ și } R_b = R\cdot 2\pi b$$

$$i = \frac{e_a + e_b}{R_a + R_b} = \frac{B_0(a^2+b^2)}{2RT(a+b)}$$

$$u_{p_1p_2} = -e_b + iR_b = -B_0\pi\frac{b^2}{T} + \frac{B_0(a^2+b^2)}{2RT(a+b)}\cdot R\cdot 2\pi b =$$

$$= \frac{B_0\pi}{T}\left[-b^2 + \frac{(a^2+b^2)b}{a+b}\right] \Rightarrow u_{p_1p_2} = \frac{B_0\pi}{T}\cdot\frac{ab(a-b)}{a+b}$$

P4. Se dă sistemul coplanar format dintr-un conductor rectiliniu parcurs de curentul $i = I\sqrt{2}\sin\omega t$ și un cadru dreptunghiular caracterizat de rezistență electrică liniară constantă, r [Ω/m]. Calculați cât este curentul electric indus în cadru prin inducție electromagnetică.



Valori numerice:

$a = 1\,cm$

$b = 2\,cm$

$d = 1\,cm$

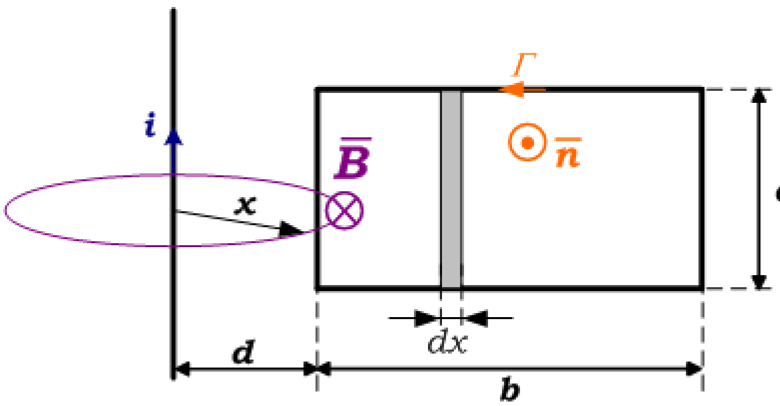
$\omega = 100\pi\,rad/s$

$I = 2\,A$

$r = 5\,\Omega/m$

Rezolvare:

Inducția electromagnetică se induce, în acest caz, datorită variației în timp a curentului electric i, care produce un câmp magnetic variabil în timp. Liniile de câmp magnetic ce intersectează planul cadrului dreptunghiular determină inducerea de tensiune electromotoare în cadru.



Conform relației Biot-Savart-Laplace: $\overline{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 i\overline{\mathbf{k}}}{4\pi x}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) = \frac{\mu_0 i\,\overline{\mathbf{k}}}{2\pi x}$

$$\Phi_{cadru} = \int_{S_\Gamma}\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{n}}dA = -\int_{S_\Gamma}B\cdot dA = -\int_0^a\int_d^{b+d}\frac{\mu_0 i}{2\pi x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^a\mathrm{d}y\int_d^{b+d}\frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_{cadru} = -\frac{\mu_0 ia}{2\pi}\ln\frac{b+d}{d} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{b+d}{d}I\sqrt{2}\sin\omega t$$

$$e_\Gamma = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_{cadru} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{b+d}{d}I\sqrt{2}\sin\omega t\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{b+d}{d}I\sqrt{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin\omega t) \Rightarrow e_\Gamma = \frac{\mu_0 a\omega}{2\pi}\ln\frac{b+d}{d}I\sqrt{2}\cos\omega t\ [V]$$

$$i_{cadru} = \frac{e_\Gamma}{R_\Gamma} = \frac{\frac{\mu_0 a\omega}{2\pi}\ln\frac{b+d}{d}I\sqrt{2}\cos\omega t}{r\cdot(2a+2b)} =$$

$$= \frac{\mu_0 a\omega}{4\pi\cdot r\cdot(a+b)}\ln\frac{b+d}{d}I\sqrt{2}\cos\omega t[A]$$

Numeric: $$i_{cadru} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10^{-2}\cdot 100\pi}{4\pi\cdot 5\cdot 3\cdot 10^{-2}}\ln 3\cdot 2\sqrt{2}\cos 100\pi t \cong 6{,}4\cos 100\pi t\ [\mu A]$$

5.5. Bobina electrică. Inductivități

Bobina electrică este un element de circuit constituit dintr-un conductor filiform izolat electric lateral și formând un număr de spire înseriate care înlănțuie practic același circuit magnetic, ceea ce presupune neglijarea dispersiei magnetice proprii a bobinei:

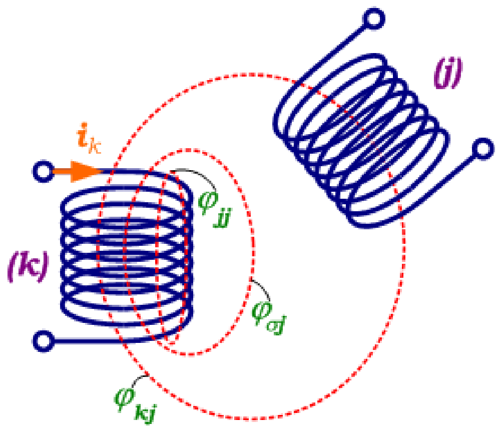


Fig. 5.6. Principiul de funcționare al bobinei și cuplajul magnetic între două bobine.

$$\Phi = N\cdot\varphi$$

unde N – numărul de spire, φ – fluxul magnetic fascicular.

Dacă se consideră două bobine (j) şi (k) aflate în apropiere, dar numai bobina (j) este parcursă de curent electric, conform legii fluxului magnetic, liniile de câmp magnetic sunt linii închise, rezultând astfel următoarele situaţii:

φ_{jj} – fluxul magnetic fascicular propriu bobinei j (liniile de câmp se închid prin spirele bobinei j);

φ_{kj} – fluxul magnetic fascicular mutual (de cuplaj magnetic) (liniile de câmp se închid prin spirele bornei k);

$\varphi_{\sigma j}$ – fluxul magnetic fascicular de dispersie (liniile de câmp se închid prin aer).

Dacă $\varphi_{kj} \neq 0$ se spune că bobinele (j) și (k) *sunt cuplate magnetic* sau că între ele există un *cuplaj magnetic liniar*.

Astfel, se pot introduce următoarele mărimi:

a. *inductivitatea proprie* a bobinei (j) se definește ca raportul dintre fluxul magnetic total al bobinei (j) și intensitatea i_j a curentului ce l-a produs:

$$L_{jj} = \frac{\Phi_{jj}}{i_j} = \frac{N_j \cdot \varphi_{jj}}{i_j}$$

b. *inductivitatea mutuală* a bobinei (k) față de bobina (j) se definește ca raportul dintre fluxul magnetic total prin bobina (k) și intensitatea i_j a curentului ce l-a produs:

$$L_{kj} = \frac{\Phi_{kj}}{i_j} = \frac{N_k \cdot \varphi_{kj}}{i_j}$$

În medii liniare: $L_{kj} = L_{jk}$

c. *inductivitatea de dispersie* a bobinei (j) în raport cu ansamblul celorlalte bobine se definește ca fluxul magnetic total de dispersie ce apare la parcurgerea bobinei (j) de către curentul și intensitatea i_j a acestuia:

$$L_{\sigma j} = \frac{\Phi_{\sigma j}}{i_j} = \frac{N_j \cdot \varphi_{\sigma j}}{i_j}$$

Unitatea de măsură a inductivității în sistemul internațional se numește *henry* (H).

Dacă mediul în care sunt dispuse bobinele este de tip omogen și liniar, iar conductorul bobinelor se comportă liniar din punct de vedere conductiv, atunci se poate demonstra că inductivitățile definite anterior nu depind de valorile intensității curentului sau fluxului magnetic, constituind caracteristici intrinseci ale sistemului de bobine. Se arată astfel că:

a. inductivitatea proprie a unei bobine depinde numai de geometria sa (formă și dimensiune) și de caracteristicile de materiale ale mediului, fiind proporțională cu pătratul numărului său de spire (*teorema inductivității proprii*);

b. inductivitatea mutuală a unei bobine față de alta depinde numai de geometria celor două bobine, de poziția lor relativă și de caracteristicile de materiale ale mediului, fiind proporțională cu produsul numărului de spire ale celor două bobine (*teorema inductivității mutuale*).

Cuplajul magnetic al celor două bobine poate fi caracterizat prin așa - numitul coeficient de cuplaj.

$$k = \sqrt{\frac{L_{jk} \cdot L_{kj}}{L_{jj} \cdot L_{kk}}} \in [0;1]$$

Simbolizarea bobinelor

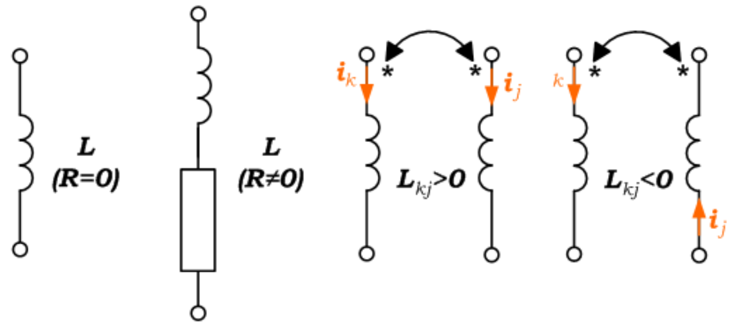


Fig. 5.7. Simbolizarea bobinelor (inclusiv cuplate magnetic).

Clasificarea bobinelor

- ***după funcționare***: bobine pentru înfășurările mașinilor, transformatoarelor, bobine de șoc, bobine de aprindere, bobine de stingere;

- ***după frecvența de lucru***: bobine destinate să funcționeze în înaltă frecvență (IF), joasă frecvență (JF) sau în domeniul frecvențelor industriale;

- ***după natura circuitului magnetic***: bobine cu și fără miez de fier (feromagnetice).

P5. Calculul inductivității bobinei cu miez de fier

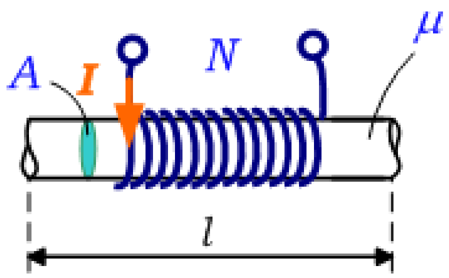


Fig. 5.8. Bobina cu miez de fier.

Pornind de la relația de definiție a inductivității se obține:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{N \cdot \varphi}{I} = \frac{N \cdot B \cdot A}{I} = \frac{N \cdot \mu H \cdot A}{I}$$

Pentru a dezvolta mai departe relația, avem nevoie de exprimarea intensității câmpului magnetic pe baza legii circuitului magnetic:

$$u_{mm_\Gamma} = \Theta_{S_\Gamma} \;\Rightarrow\; H \cdot l = N \cdot I \;\Rightarrow\; H = \frac{N \cdot I}{l}$$

Revenind în relația anterioară se obține:

$$L = \frac{N \cdot \mu \dfrac{N \cdot I}{l} \cdot A}{I} = N^2 \frac{\mu A}{l} \;\Rightarrow\; L = \frac{N^2}{R_m},$$

confirmându-se o dată în plus teorema inductivității proprii, conform căreia inductivitatea proprie a unei bobine depinde numai de pătratul numărului de spire și, prin intermediul reluctanței magnetice, de dimensiuni și material.

P46. Calculul inductivității liniei bifilare

Se consideră o linie electrică aeriană bifilară, având conductoarele cilindrice, paralele, de raze *a*, de lungime foarte mare în comparație cu distanța dintre ele, parcurse în sensuri opuse de curentul *i*.

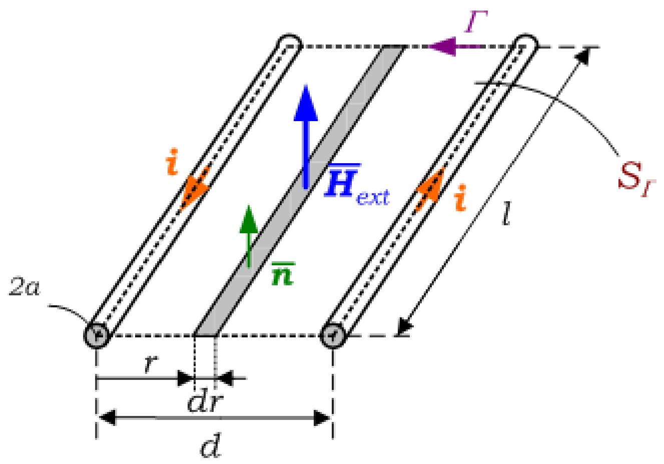


Fig. 5.9. Linia electrică bifilară.

Calculul pornește de la formula intensității câmpului magnetic produs de un conductor infinit lung parcurs de curentul *i*:

$$H_{ext}(r) = \frac{i}{2\pi r},$$

cu ajutorul căreia se determină fluxul magnetic prin suprafața S_Γ produs de unul dintre conductoare:

$$\Phi_{ext} = \int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \cdot dA = \int_{S_\Gamma} \mu_0 H dA = \mu_0 l \int_a^{d-a} \frac{i}{2\pi r} dr =$$

$$= \frac{\mu_0 l i}{2\pi} \int_a^{d-a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 l i}{2\pi} \ln\frac{d-a}{a} \approx \frac{\mu_0 l i}{2\pi} \ln\frac{d}{a} (d >> a)$$

Fluxul total se obține prin superpoziția fluxurilor produse de cele două conductoare:

$$\Phi_t = 2 \cdot \Phi_{ext} = \frac{\mu_0 l i}{\pi} \ln\frac{d}{a}$$

Inductivitatea exterioară este atunci:

$$L_{ext} = \frac{\Phi_t}{i} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln\frac{d}{a}$$

În interiorul conductoarelor, inductivitatea se calculează pe baza fluxului interior:

$$\Phi_{int} = \int_{S_\Gamma} \overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \cdot dA = \int_0^a \mu_0 \mu_r l \frac{ir}{2\pi a^2} dr =$$

$$= \mu_0 \mu_r l \frac{i}{2\pi a^2} \int_0^a r dr = \mu_0 \mu_r l \frac{i}{2\pi a^2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu_r l i}{4\pi}$$

$$L_{int} = \frac{\Phi_{int}}{i} = \frac{\mu_0 \mu_r l}{4\pi}$$

Inductivitatea totală a liniei bifilare se obține prin însumarea inductivității interioare și exterioare:

$$L_t = L_{ext} + L_{\text{int}} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \cdot \left(\ln\frac{d}{a} + \frac{\mu_r}{4} \right)$$

Inductivitatea lineică a liniei bifilare este:

$$L_l = \frac{L_t}{l} = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \left(\ln\frac{d}{a} + \frac{\mu_r}{4} \right) = \left(4\ln\frac{d}{a} + \mu_r \right) \cdot 10^{-4} \ [H / km]$$